一九八六年 南京工学院学报 No. 2
第二期 JOURNAL OF NANJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY 1986

列向量等权互异且行向量准等权矩阵的最优生成算法

陈 溧

摘要 本文引入一个递归型矩阵，给出了 GF(2) 上列向量等权互异且行向量准等权矩阵的一种生成算法，这个算法是最优时空的，它可直接用于生成有名的最佳最小奇权列码（SEC-DED码）校验矩阵。最后，我们把算法推广到 n 元集上。

一、引 言

本文给出了一类矩阵的生成算法。这类矩阵有这样的特性：第一，矩阵中无相同的列向量；第二，对于矩阵中的任一元，每一列该元的个数相同，每一行该元的个数之差不超过1。这样的矩阵称为“列向量等权互异且行向量准等权矩阵”(后文中简称列/行等权矩阵)。

首先，我们引入了一个递归形式的矩阵，然后在这个递归矩阵上进行循环操作(计算)，逐步分层、分块地生成列/行等权矩阵。我们的算法是最优时空的。

列/行等权矩阵是一类重要的矩阵，它可以直接用于生成有名的最佳最小奇权列码校验矩阵（最佳 Hamming 校验矩阵）[1] [3]，并能解决一类作业按排问题。

我们还应用本文的递归矩阵研究了 tEC-MUED 定权码[2]。

二、(0，1)型列/行等权矩阵的生成算法

本节将讨论（0，1）型列/行等权矩阵的生成算法，并把它用于生成最佳最小奇权列码校验矩阵。

符号说明：

$\Delta(R, J, m)$——(0，1) 型 $(R\times m)$ 矩阵，它的列向量的权都为 J，$0\leqslant J\leqslant R$；

$\langle t\rangle(m)$ ——(0，1) 型 $(1\times m)$ 矩阵，它的行元素全为 t；

本文于1985年5月6日收到。
陈 溧：数学力学系教师。

$\circ$——矩阵的上下合并运算符，即

$$N\circ M=\begin{bmatrix}N\\M\end{bmatrix};$$

$\oplus$——矩阵的左右合并运算符，即$N\oplus M=[NM]$；

$\overline{\oplus}$——把该运算符后面的矩阵倒置，然后“$\oplus$”起来，最后把“1”个数多的行变换到矩阵的上部。

定义 1　在 $\Delta(R,\ J,\ m)$ 中，如果有

$$0\leqslant J\leqslant R \qquad \& \qquad 0\leqslant m\leqslant C_R^J \tag{1}$$

成立，则称 $\Delta(R,\ J,\ m)$ 满足 L—条件。

定义 2　若满足 L—条件的 $\Delta(R,\ J,\ m)$ 中任意两行“1”的个数之差不超过1，且无相同的列向量，那么称 $\Delta(R,\ J,\ m)$为（0，1）型列/行等权矩阵，并可认为空矩阵（ϕ）也是列/行等权矩阵。

定义 3　如果 $\Delta(R,\ J,\ m)$ 满足 L—条件，规定：

结果＼条件	$m=0$	$J=0$	$J=R$	$m=1$	$J=1$	$J=R-1$
$\Delta(R,\ J,\ m)=$	ϕ	$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\left.\begin{matrix}1\\\vdots\\1\end{matrix}\right\}J\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\left.\begin{matrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{matrix}\right\}m\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&\cdots\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots\cdots&1\\0&1&\cdots\cdots&1\\1&0&&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$

显然，表中六类矩阵都是列/行等权矩阵，称它们为结束状态。这里“1”的个数多的行集中在矩阵的上端。

根据定义3，可以假设以后讨论的 $\Delta(R,\ J,\ m)$ 满足

$$2\leqslant J\leqslant R-2\ . \tag{2}$$

显然，满足L—条件的$\triangle(R,\ J,\ m)$一定可以表为下面的形式：

$$\begin{aligned}\Delta(R,\ J,\ m)&=\begin{bmatrix}11\cdots\cdots\cdots\cdots 100\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ \Delta_1(R-1,\ J-1,\ m_1)\Delta_2(R-1,\ J,\ m-m_1)\end{bmatrix}\\&=[\langle 1\rangle(m_1)\circ\Delta_1(R-1,\ J-1,\ m_1)]\oplus[\langle 0\rangle(m_2)\circ\Delta_2(R-1,J,m-m_1)]\end{aligned} \tag{3}$$

定理 1　设 $\Delta(R,\ J,\ m)$ 满足 L—条件（即 $0\leqslant J\leqslant R-2$，$0\leqslant m\leqslant C_R^J$），令 $m_1=\left[\dfrac{mJ}{R}+\dfrac{R-1}{R}\right]$，则 $\Delta_1(R-1,\ J-1,\ m_1)$ 和 $\Delta_2(R-1,\ J,\ m-m_1)$ 也满足L—条件。

证　显然有

$$\frac{mJ}{R}\leqslant m_1<\frac{mJ}{R}+1,$$

又由 $m\leqslant C_R^J$，则 $\dfrac{mJ}{R}\leqslant C_{R-1}^{J-1}$，于是有

$$\frac{mJ}{R}\leqslant m_1\leqslant C_{R-1}^{J-1}\ .$$

根据我们的假设（2），得 $\Delta_1(R-1,\ J-1,\ m_1)$ 满足 L—条件。而 $m-m_1\leqslant m-\frac{mJ}{R}\leqslant C_R^J\left(\frac{R-J}{R}\right)$，所以 $m-m_1\leqslant C_{R-1}^J$，即 $\Delta_2(R-1,\ J,\ m-m_1)$ 也满足 L—条件。证毕。

由定理1不难看出，$\Delta(R,\ J,\ m)$ 满足 L—条件，那么它必然可以递归表出，也就是 $\Delta(R,\ J,\ m)$ 是一种递归型矩阵。

定理 2　设 $\Delta(R-1,\ J-1,\ m_1)$ 和 $\Delta(R-1,\ J,\ m-m_1)$ 都是列/行等权矩阵，且 $m_1=\left[\frac{mJ}{R}+\frac{R-1}{R}\right]$，则

$$\Delta'(R,\ J,\ m)=[\langle 1\rangle(m_1)\oplus\langle 0\rangle(m-m_1)]\circ[\Delta(R-1,J-1,m_1)\overline{\oplus}\Delta(R-1,\ J,\ m-m_1)] \tag{4}$$

也是列/行等权矩阵。

证　显然

$$[\Delta(R-1,\ J-1,\ m_1)\overline{\oplus}\Delta(R-1,\ J,\ m-m_1)] \tag{5}$$

是行向量准等权的。式中“1”的总数为 $(mJ-m_1)$，记它的行权较小者为 d，有

$$\frac{mJ-m_1}{R-1}-1<d\leqslant\frac{mJ-m_1}{R-1}\ .$$

又因为

$$\frac{mJ}{R}\leqslant m_1\leqslant\frac{mJ}{R}+\frac{R-1}{R},$$

所以

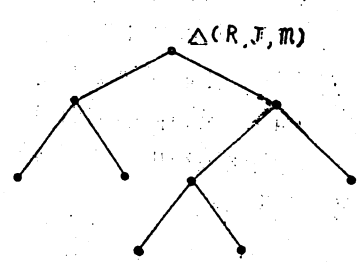
$$\frac{mJ-m_1}{R-1}\leqslant m_1\leqslant\frac{mJ-m_1}{R-1}+1,$$

于是有

$$0\leqslant m_1-d\leqslant 1\ .$$

这样，$\Delta'(R,\ J,\ m)$ 也是行向量准等权矩阵。又由于 $\Delta(R-1,J-1,\ m_1)$ 和 $\Delta(R-1,\ J,\ m-m)$ 中均无相同的列向量，因此 $\Delta'(R,\ J,\ m)$ 也无相同的列向量，所以 $\Delta'(R,\ J,\ m)$ 是列/行等权矩阵。证毕。

有了定理1、2以后，我们就可以设计列/行等权矩阵的生成算法了。为了避免文章冗长，这里只给出算法主要的步骤。



算法 A

步骤1　检验 $\Delta(R,\ J,\ m)$ 是否满足 L—条件。

步骤2　分解 $\Delta(R,\ J,\ m)$ 为 $\Delta(R_1,\ J_1,\ m_1)$，$\Delta(R_2,\ J_2,\ m_2)$，…，$\Delta(R_n,\ J_n,m_n)$，这里 $\Delta(R_i,\ J_i,\ m_i)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 都是结束状态。

步骤 3　依秩把 $\Delta(R_i, J_i, m_i)$ 用“$\overline{\oplus}$”算子合并在一起。注意，“分解”和“合并”的对象一致。

步骤 2 实际上就是产生了一个二叉树。步骤 3 就是把某结点的两个“儿子”结点$\overline{\oplus}$合并（还需根据定理 2 附加一行）。算法A也可以边“分解”边“合并”。

例：设$R=7$，$J=5$，$m=13$；求 $\Delta(R, J, m)$。

解：由算法A中的步骤 1，$\Delta(7, 5, 13)$ 检验后确实满足 L—条件。再由步骤 2，得

- $\Delta(7, 5, 13)$
  - $\Delta(6, 4, 10)$
    - $\Delta(5, 3, 7)$
      - $\Delta(4, 2, 5)$
        - $\Delta(3, 1, 3)$
        - $\Delta(3, 2, 2)$
      - $\Delta(4, 3, 2)$
    - $\Delta(5, 4, 3)$
  - $\Delta(6, 5, 3)$

二叉树上的叶子都满足定义 3 中的条件，于是由步骤 3 得

$$\Delta(7, 5, 13)=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&0&0&1&1&0&1&0&1\\ 1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}.$$

我们容易证明

定理 3　算法A的时间复杂性为 $O(R\cdot m)$，因此，算法A是最优时间算法。它显然也是最优空间的。

定理 4　$\Delta(R, J, m)$ 可以成为列/行等权矩阵的充要条件是 $\Delta(R, J, m)$ 满足 L—条件。

上面，已经给出了GF(2) 上列/行等权矩阵的生成算法，现在讨论它在编码理论上的应用。

“最佳最小奇权列码”是 Hsiao(1970) 提出的。张焕国（1980）给出了该码校检矩阵的一种生成算法（循环向量法）。

“最佳最小奇权列码”校检矩阵H是这样一种矩阵：

（1）　每列含奇数个“1”；

（2）　总的“1”的个数最少；

（3）　任两行“1”的个数之差不超过 1；

（4）　无相同的列向量。

现在就来给出H的生成算法，这个算法也是最佳的。假如要生成信息位为 k 的 SEC-DED 码。首先根据

$$R\geqslant 1+\log_2(k+R) \tag{6}$$

来确定R。

然后，对于确定的R，根据算法A求作

$$\Delta(R,\ 2i+1,\ C_R^{2i+1})\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ I-1\ . \tag{7}$$

这里，

$$\sum_{i=0}^{I-1} C_R^{2i+1} \leqslant k+R \leqslant \sum_{i=0}^{I} C_R^{2i+1}\ . \tag{8}$$

令　$m=(k+R)-\sum_{i=0}^{I-1} C_R^{2i+1}$，再由算法$A$生成

$$\Delta(R,\ 2I+1,\ m)\ .$$

那末

$$H=\left[\bigoplus_{i=n}^{I-1}\Delta(R,\ 2i+1,\ C_R^{2i+1})\right]\oplus\Delta(R,\ 2I+1,\ m) \tag{9}$$

就是我们需求的“最佳最小奇权列码”校检矩阵。

三、(1, 2, ⋯, n)型列/行等权矩阵的生成算法

定义 4　设有矩阵$M=[m_{ij}]_{R\times m}$，其中$m_{ij}\in S=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$称$M$为（1，2，⋯，$n$）型矩阵。（后文均假设$M$为（1，2，⋯$n$）型矩阵。）

定义 5　对于M的某一行（列）A，A中$(i\in S)$的个数称为i在A中的权。

定义 6　如果对S中任一元素i，M的每一列i的个数都相同，任两行i的个数之差不超过1，且M无相同的列向量，称M为列/行等权矩阵。

根据定义6，不难知道M的每一列对应于“不尽相异元素的排列”中的一种取法。我们约定，$M(\{w_1,\ \cdots,\ w_n\},\ m)$　是$R=\sum_{i=1}^{n} w_i$行，m列矩阵，且每一列i的个数为w_i。显然，如果$M(\{w_1,\ \cdots,\ w_n\},\ m)$是列/行等权的，则必有

$$m\leqslant R!\Big/\prod_{i=1}^{n}(w_i!)\ . \tag{10}$$

定理 5　如果$M(\{w_1,\ \cdots,\ w_n\},\ m)$中有$m=R!\Big/\prod_{i=1}^{n}(w_i!)$，那么令

$$\begin{cases} M(\{w_1,\ \cdots,\ w_n\},\ m)=\bigoplus_{i=1}^{n}[\langle i\rangle\circ M(\{w_1,\ \cdots,w_{i-1}\cdots,\ ,w_n\},\ m_i)]; \\ M(\{0,\ w_2,\ \cdots,\ w_n\},\ m)=M(\{w_2,\ \cdots,\ w_n\},\ m); \\ M(\{w_i\},\ m)=(i,\ \cdots,\ i)^T, \end{cases} \tag{11}$$

这里

$$m_i=\binom{R-1}{w_1,\cdots,\ w_i-1,\ \cdots w_n},$$

则$M(\{w_1,\ \cdots,\ w_n\},\ m)$是列/行等权的。

上述定理的证明暂略。这个定理给出一种特殊情形的列/行等权矩阵的生成算法。一般

地，可用逐个生成的办法，即首先生成码字“1”，这时把“2”,…，“n”视为同一元——待定元，记为“0”；它的个数 $Q=\sum_{i=2}^{n}w_i$。且令

$$M(\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}, m)=M(\{w_1; Q\}, m), \tag{12}$$

然后生成码字“2”，…，“n”。

定义 7　在$M(\{w_1; Q\}, m)$中，如果

$$0\leqslant m\leqslant C_{w_1+Q}^{w_1}\binom{Q}{w_2, \cdots, w_n} \tag{13}$$

称$M(\{w_1; Q\}, m)$满足L—条件。

类似于上一节，可以假设

$$w_i\geqslant w_{i+1}\ ;\ \ 2\leqslant w_1\leqslant\sum_{j=1}^{n}w_j-2\ . \tag{14}$$

这时 $M(\{w_1; Q\}, m)$ 可表为

$$M(\{w_1; Q\}, m=\begin{bmatrix} 1\ 1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1\ 0\ 0\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ M_1(\{w_1-1; Q\}, m_1)M_2(\{w_1; Q-1)\}, m_2) \end{bmatrix}\ . \tag{15}$$

定理 6　设$M(\{w_1; Q\}, m)$满足L—条件。令$m_1=\left[\frac{mw_1}{R}+\frac{R-1}{R}\right](R=w_1+Q)$，$m_2=m-m_1$，则$M_1(\{w_1-1; Q\}, m_1)$和$M_2(\{w_1; Q-1\}, m_2)$也满足$L$—条件。

定理 7　设$M(\{w_1-1; Q\}, m_1)$和$M(\{w_1; Q-1\}, m-m_1)$都是列/行等权的，则

$$M'(\{w_1; Q\}, m)=[\langle 1\rangle(m_1)\oplus\langle 0\rangle(m-m_1)]$$

$$\circ[M(\{w_1-1; Q\}, m_1)\overline{\oplus}M(\{w_1; Q-1\}, m-m_1)] \tag{16}$$

也是列行等权的。

定理6、7的证明类似于定理1、2，这里暂略。注意式（16）中可能出现$r\leqslant\binom{Q}{w_1\cdots, w_n}$个列相同，这是待定元导致的。把这$r$列选出生成$M(\{w_2\cdots, w_n\}, r)$就是算法的递归过程。同样它是最优时空的。本文不再赘述。

在实际工作中，有时会遇到这样一类问题：某车间有R台机器（或工人），I_1，$I_2\cdots$，I_R；加工n种另件1，2…，n，其中另件i每天需要w_i个。设每台机器一天只能做一个另件，即$R=\sum_{i=1}^{n}w_i$。问怎样安排方能使m天内每台机器做另件$i(i=1, 2, \cdots, n)$的次数（几乎）相同？这类作业按排问题，用本节的方法就能获得解决。

本文得到张焕国、王伯英老师的指导和帮助，在此深表感谢。

参 考 文 献

[1]　张焕国：最佳最小奇重量列码检验矩阵的一种生成算法，《武汉大学学报》（自

然科学版），№4，1980。

［2］陈溧：tEC-MUED 系统码的一个注记，《计算机学报》，Vol 7，№4，1984。

［3］Hsiao, M. Y.: A Class of Optimal minimum oddweight-column SEC-DED Codes, IBM Reserach and Development, Vol 14, №4, 1970.

An Optimal Generating Algorithm for Matrix of Equal-Weight Column and Quasiequal-Weight Row

Chen Li

Department of Mathematics and Mechanics

ABSTRACT

According to a recursive matrix which is introduced in this paper, an algorithm for matrix of equal-weight column which is inequal each other and quasiequal-weight row has been given. The algorithm is optimal in time and space, and it can be applyed to generate check matrix of "Optimal minimum odd-weight-column SEC-DED codes". Finally, this algorithm has been extended to set of n elements.